Calcul différentiel

$\longrightarrow$ $f : \Omega \to E$ différentiable de différentielle df ($\Omega \subset$ Fev)

$\iff \forall a \in \Omega \quad f(x) - f(a) = df_a(x-a) + o(x-a)$

$$df_a \in \mathcal{L}(F,E)$$

$$df \in \mathcal{L}(F,E)^{\Omega}$$

▷ La différentielle est unique

▷ f linéaire $\Rightarrow \forall a \in \Omega \ df_a = f$

$\longrightarrow$ $f : \Omega \longrightarrow F_1 \times \dots \times F_p$

$$a \longmapsto (f_1(a), \dots, f_p(a))$$

f diff en $a \iff f_1, \dots, f_p$ le sont

Dans ce cas $df_a(h) = (df_{1a}(h), \dots, df_{pa}(h))$

$\longrightarrow$ Composition : f diff en a, g diff en $f(a)$

alors $g \circ f$ diff en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$

↳ Règle de la chaîne :

$\gamma : \underset{\subset \mathbb{R}}{I} \to E$ dérivable en t_0 $\quad \Rightarrow \quad (f \circ \gamma)'(t_0) = df_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$

$f : \Omega \to F$ diff en $\gamma(t_0)$ $\qquad\qquad = \langle \nabla f_{\gamma(t_0)}, \gamma'(t_0) \rangle$

→ f admet une dérivée selon $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ en $a \in \Omega$
$\Leftrightarrow t \longmapsto f(a + t\vec{u})$ dérivable en 0

↳ f diff en $a \Rightarrow f$ possède une dérivée selon tout $\vec{u}$ en a.

gradient → $f : \Omega \to F$ diff en a, $e_1, \dots, e_n$ base de E

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, df_a(e_i) \underset{\text{base con}}{=} \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$= \langle \nabla f_a , h \rangle$$

→ f admet un extrêmum local en a
$\Rightarrow \forall \vec{u} \quad f(a + t\vec{u})$ est de dérivée nulle en 0
$\Rightarrow df_a = 0 \quad (df_a(e_i) = 0 \dots)$

→ $f \; \mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ diff sur Ω preuve astucieuse (TAF)

→ $f \; \mathcal{C}^1 \Leftrightarrow f$ diff Ω et $df : \Omega \longmapsto \mathcal{L}(E,F)$ $\mathcal{C}^0$
$$a \longmapsto df_a$$

→ Jacobienne de f en $a = J_f(a) = [df_a]_{\text{base con}}$

↳ $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$

$\longrightarrow$ Accroissements finis : $a, b \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$

$\triangleright$ $f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{(1-t)a+tb}(b-a)\, dt$

$= \int_0^1 \langle \nabla f((1-t)a+tb), b-a \rangle\, dt$

$\triangleright$ $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t < 1} |||df_{(1-t)a+tb}|||\ \|b-a\|$

$\longrightarrow$ EAF : Ω convexe, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \underline{\mathbb{R}})$

$\exists \theta \in [0,1]$, $f(b) - f(a) = \langle \nabla f_{(1-\theta)a+\theta b}, b-a \rangle$

$\xrightarrow[\text{Locale}]{\text{Inversion}}$ $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$, $a \in \Omega$,

$\det J_f(a) \neq 0$. $\exists U \in \mathcal{V}(a)$, $V \in \mathcal{V}(f(a))$

$f : U \longrightarrow V$ bijective (il suffit de Mq injective puis TAF)